

## Stima & Identificazione

*Compito del 20 Giugno 2016, ore 8:30, Aula 014, Centro Didattico Morgagni*

**Problema 1** - Si consideri il segnale stocastico  $y_t$  generato dalla seguente equazione alle differenze:

$$\begin{aligned}y_t + \frac{4}{5} y_{t-2} &= w_t - 3w_{t-1} \\ w_t &= wn(0, 1)\end{aligned}$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se tale segnale risulta stazionario.
- b) Determinare, se possibile, un modello ARMA del segnale ed una sua rappresentazione di stato alle innovazioni.
- c) Determinare, se possibile, lo spettro  $\Phi_y(z)$  e la densità spettrale  $\varphi_y(\omega)$  del segnale.
- d) Determinare la funzione di auto-covarianza  $R_y(k)$  del segnale.
- e) Determinare i predittori MMSE  $\hat{G}_T(z)$  del segnale a  $T = 1, 2, 3$  passi ed i relativi guadagni di predizione  $\eta_T$ .
- f) Determinare un modello AR di ordine minimo che fornisca gli stessi valori di  $R_y(0), R_y(1), R_y(2)$  calcolati al punto d).

**Problema 2** - Si consideri il modello di moto a tempo-continuo WNA, con stato  $x = [x_1, x_2]^\top = [\text{posizione}, \text{velocità}]^\top$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= w \\ y &= x_1 + v \\ w &\perp v \\ w &= wn(0, q) \\ v &= wn(0, r) \end{cases}$$

a) Verificare che, posto  $\varrho \triangleq q/r$ , l'osservatore ottimo (MMSE) a guadagno costante per il suddetto sistema è:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \sqrt{2} \varrho^{1/4} (y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \varrho^{1/2} (y - \hat{x}_1) \end{cases}$$

b) Verificare anche che il corrispondente MMSE a regime è dato da

$$P = E[\tilde{x}\tilde{x}^\top] = r \begin{bmatrix} \sqrt{2} \varrho^{1/4} & \varrho^{1/2} \\ \varrho^{1/2} & \sqrt{2} \varrho^{3/4} \end{bmatrix}$$

c) Verificare inoltre che il corrispondente polinomio caratteristico dell'osservatore è dato da

$$\alpha(s) = s^2 + \sqrt{2} \varrho^{1/4} s + \varrho^{1/2}$$

d) Determinare, per un generico osservatore asintotico di guadagno  $K = [K_1, K_2]^\top$  il corrispondente MMSE risolvendo rispetto a  $P$  l'equazione di Lyapunov

$$(A - KC)P + P(A - KC)^\top + DqD^\top + KrK^\top = 0$$

**Problema 3** - Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} x_k + w_k \\ w_k &= wn(0, \sigma^2 I_3)\end{aligned}$$

Supponendo di acquisire le osservazioni  $\{x_k; k = 0, 1, \dots\}$ , si dica come si possono stimare ricorsivamente i parametri  $f_1, f_2, f_3, s_1, s_2, s_3$  usando il metodo dei minimi quadrati.

**Problema 4** - Si consideri l'operatore lineare con funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 1}{z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{3}{2}}$$

Effettuare una decomposizione *causale-strettamente anticausale*  $G(z) = G_+(z) + G_-(z)$  dell'operatore e descrivere l'implementazione del filtro  $y_t = G(z)u_t$  con due filtri che operano, rispettivamente in avanti e all'indietro, sugli ingressi  $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ .

**Suggerimento:** Utilizzare la decomposizione

$$G(z) = az^2 + bz + c + G_1(z),$$

dove  $G_1(z) = \frac{n(z)}{z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{3}{2}}$  è strettamente propria, ed effettuare uno sviluppo di Heaviside di  $G_1(z)$ .

**Problema 5** - Si consideri il sistema dinamico a tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ u(t) &\sim (u(t), 0) \\ w(t) &= wn(0, Q) \end{cases}$$

Dimostrare che la media  $\bar{x}(t) \triangleq E[x(t)]$  e la varianza  $P(t) \triangleq E[\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^\top]$ , con  $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t)$ , soddisfano le equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ \dot{P}(t) &= AP(t) + P(t)A^\top + DQD^\top \end{cases}$$

**Suggerimento:** Ricordarsi che la soluzione dell'equazione differenziale di stato è

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Dw(s)ds$$

e le relazioni

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [e^{A(t-t_0)}] &= Ae^{A(t-t_0)} \\ \frac{d}{dt} \left[ \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, s) ds \right] &= g(t, \beta(t)) \dot{\beta}(t) - g(t, \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [g(t, s)] ds\end{aligned}$$